第9講　置き換えて3次，解の個数など

9　次の各問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$f(\theta)=4\cos 2\theta \sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．また，方程式 $f(\theta)=k$ が異なる4個の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．さらに，その k の最小値を k_1 とするとき，$f(\theta)=k_1$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha < 2\pi)$ の異なる実数解の個数が3となるような α の値の範囲を求めよ．

(2)　k を実数の定数とするとき，方程式 $x^6-6x^5+12x^4-(k+12)x^3+12x^2-6x+1=0$ の異なる実数解の個数の最大値を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　置き換えて3次，解の個数など

9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において定数 a がいろいろな値をとるとき，
方程式 $2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} \leqq a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a \geqq 3 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(-1 \leqq a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\right) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　置き換えて３次，解の個数など

9　次の各問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とするとき，$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．また，方程式 $f(\theta)=k$ が異なる４個の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ．さらに，その k の最小値を k_1 とするとき，$f(\theta)=k_1$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha < 2\pi)$ の異なる実数解の個数が３となるような α の値の範囲を求めよ．

(2)　k を実数の定数とするとき，方程式 $x^6-6x^5+12x^4-(k+12)x^3+12x^2-6x+1=0$ の異なる実数解の個数の最大値を求めよ．

【答】 (1) 最大値 $3\sqrt{2}$，最小値 $-8-3\sqrt{2}$，k の値の範囲は $k=2\sqrt{2}$，$8-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$，α の値の範囲は $\frac{5}{4}\pi \leqq \alpha < \frac{7}{4}\pi$　(2) 4

【解答】

(1)　$\sin\theta=t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$$f(\theta)=4(1-2t^2)t+3\sqrt{2}(1-2t^2)-4t$$
$$=-8t^3-6\sqrt{2}t^2+3\sqrt{2}$$

となる．この式を $g(t)$ とおくと，$g'(t)=-12\sqrt{2}t(\sqrt{2}t+1)$ より $g(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$8-3\sqrt{2}$	↘	$2\sqrt{2}$	↗	$3\sqrt{2}$	↘	$-8-3\sqrt{2}$

となる．ここで

$$3\sqrt{2}-(8-3\sqrt{2})=6\sqrt{2}-8=\sqrt{72}-\sqrt{64}>0 \quad \text{および} \quad 2\sqrt{2}>0>-8-3\sqrt{2}$$

より

$$\textbf{最大値は } \mathbf{3\sqrt{2}}, \qquad \textbf{最小値は } \mathbf{-8-3\sqrt{2}}$$

また，方程式 $t=\sin\theta$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (t<-1,\ t>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (t=\pm 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (-1<t<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となっているので，上記の増減を考えあわせると，$f(\theta)=k$ の異なる実数解の個数が４となるのは

$$\boldsymbol{k=2\sqrt{2},\ 8-3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}}$$

よって $k_1=2\sqrt{2}$ となるので，$f(\theta)=k_1$ となる $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲での実数解は小さいほうから順に θ_1，θ_2，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$ と表せる．$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ の範囲に上記の４つの解のうち３個だけが含まれるような α を考えると，求める α の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi \leqq \alpha < \frac{7}{4}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$x=0$ は明らかに解ではないので，与式の両辺を x^3 で割り整理すると

$$x^3-6x^2+12x-(k+12)+\frac{12}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$$

となる．ここで $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおき，整理すると

$$t^3-6t^2+9t=k$$

となる．この式の左辺を $h(t)$ とおくと，$h'(t)=3(t-1)(t-3)$

より $h(t)$ の増減は

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(t)$	↗	4	↘	0	↗

となる．また x の方程式 $t=x+\dfrac{1}{x}$ の異なる実数解 x の個数は，$x^2-tx+1=0$ の判別式を考えることで

$$\begin{cases} 2 & (t<-2,\ t>2\text{ のとき}) \\ 1 & (t=\pm 2\text{ のとき}) \\ 0 & (-2<t<2\text{ のとき}) \end{cases}$$

となり，異なる実数 t_1，t_2 に対して $x^2-t_1x+1=0$ と $x^2-t_2x+1=0$ は共通な解をもたないこと，及び $h(-2)=-50$，$h(0)=0$，$h(2)=2$，$h(4)=4$ により，与式の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 & (-50<k<0\text{ のとき}) \\ 1 & (k=-50\text{ のとき}) \\ 2 & (k<-50,\ k=0,\ k>2\text{ のとき}) \\ 3 & (k=2\text{ のとき}) \\ 4 & (0<k<2\text{ のとき}) \end{cases}$$

よって，求める実数解の個数の最大値は **4**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　置き換えて３次，解の個数など

9　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において定数 a がいろいろな値をとるとき，
方程式 $2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 = a$ の解の個数がどのように変わるかを調べよ．

【選択肢】

㋐
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(\dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} \leqq a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

㋑
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a \geqq 3 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 6 & \left(-1 \leqq a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27}\right) \end{cases}$$

㋒
$$\begin{cases} 0 & \left(a < \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a > 3 \text{ のとき}\right) \\ 1 & (a = 3 \text{ のとき}) \\ 2 & \left(a = \dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} < a < 3 \text{ のとき}\right) \\ 4 & \left(\dfrac{-52-20\sqrt{10}}{27} < a < -1,\ a = \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \\ 5 & (a = -1 \text{ のとき}) \\ 6 & \left(-1 < a < \dfrac{-52+20\sqrt{10}}{27} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

【答】　㋒

【解答】

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$，$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ より

$$\begin{aligned} 2\sin 3\theta - 2\cos 2\theta - 1 &= 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 2(1 - 2\sin^2\theta) - 1 \\ &= -8\sin^3\theta + 4\sin^2\theta + 6\sin\theta - 3 \end{aligned}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin\theta=t$ とおくと, 与式は $-8t^3+4t^2+6t-3=a$, また $0\leqq\theta<2\pi$ より $-1\leqq t\leqq 1$ となる. ここで $f(t)=-8t^3+4t^2+6t-3$ とおくと

$$f'(t)=-24t^2+8t+6$$

よって $f(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$\frac{1-\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{10}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	3	↘		↗		↘	-1

となる. このとき

$$f(t)=f'(t)\left(\frac{1}{3}t-\frac{1}{18}\right)+\frac{40}{9}t-\frac{8}{3}$$

より

$$f\left(\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{40}{9}\cdot\frac{1\pm\sqrt{10}}{6}-\frac{8}{3}=\frac{-52\pm20\sqrt{10}}{27}\quad(\text{複号同順})$$

また

$$3-\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}=\frac{133-20\sqrt{10}}{27}>\frac{133-20\times4}{27}>0$$

$$\frac{-52-20\sqrt{10}}{27}-(-1)=\frac{-25-20\sqrt{10}}{27}<0$$

より

$$\frac{-52-20\sqrt{10}}{27}<-1<\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}<3$$

である.

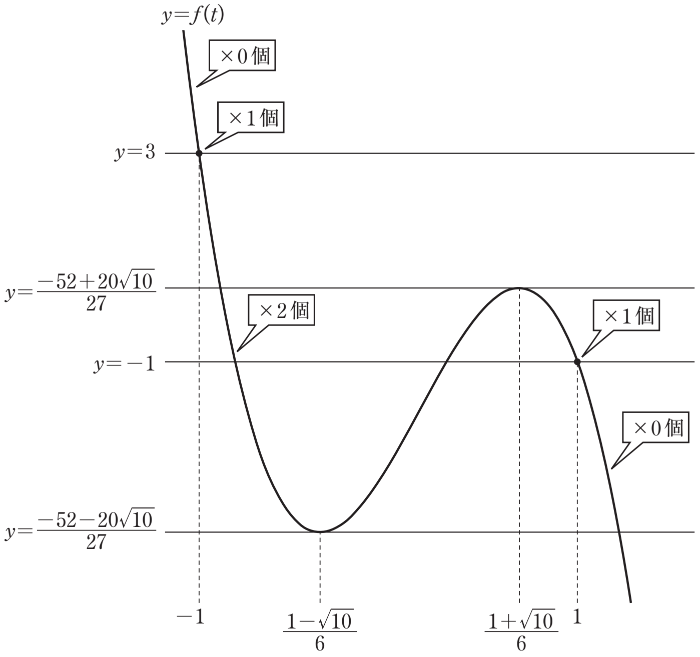
また, θ に関する方程式 $t=\sin\theta$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases}0 & (t<-1,\ t>1\text{ のとき})\\ 1 & (t=\pm1\text{ のとき})\\ 2 & (-1<t<1\text{ のとき})\end{cases}$$

となるので, 上記の増減を考えると解の個数は

$$\begin{cases}\mathbf{0} & \left(a<\frac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ a>3\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{1} & (a=3\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & \left(a=\frac{-52-20\sqrt{10}}{27},\ \frac{-52+20\sqrt{10}}{27}<a<3\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{4} & \left(\frac{-52-20\sqrt{10}}{27}<a<-1,\ a=\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}\text{ のとき}\right)\\ \mathbf{5} & (a=-1\text{ のとき})\\ \mathbf{6} & \left(-1<a<\frac{-52+20\sqrt{10}}{27}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。